# Equazioni differenziali ordinarie

## Definizione

Siano $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto fissato e $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione differenziabile (possiamo assumere che $V$ sia di classe $C^1$). Sia $T > 0$ un numero reale oppure $T = +\infty$. Diciamo che la funzione

$$X : [0, T) \to \mathbb{R}^d$$

è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

se:

- $X$ è continua in zero e $X(0) = x_0$;
- $X$ è differenziabile (e quindi anche continua) su $[0, T)$;
- per ogni $t \in [0, T)$ abbiamo $X'(t) = F(X(t))$.

Scrivendo

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad F(X) = \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ \vdots \\ F_d(X) \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere l'equazione differenziale $X' = F(X)$ come un sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1\big(x_1(t), \dots, x_d(t)\big) \\ x_2'(t) = F_2\big(x_1(t), \dots, x_d(t)\big) \\ \vdots \\ x_d'(t) = F_d\big(x_1(t), \dots, x_d(t)\big) \end{cases}$$

---

## Funzioni lipschitziane

**Definizione 1.** *Sia $K$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che una funzione $F : K \to \mathbb{R}^m$ è Lipschitz, se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|F(X) - F(Y)| \le L|X - Y| \quad \textit{per ogni} \quad X, Y \in K.$$

**Proposizione 2.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$ su $\Omega$. Allora, per ogni palla chiusa $\overline{B}_r(X_0) \subset \Omega$, esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|F(X) - F(Y)| \le L|X - Y| \quad \textit{per ogni} \quad X, Y \in \overline{B}_r(X_0).$$

**Dimostrazione:** Siano $X, Y$ due punti in $\overline{B}_r(X_0)$. Allora, per ogni $t \in [0,1]$, abbiamo che

$$tX + (1-t)Y \in \overline{B}_r(X_0).$$

Consideriamo la funzione

$$f(t) := F\big(tX + (1-t)Y\big).$$

Allora $f(0) = F(X)$, $f(1) = F(Y)$ e

$$f'(t) = (X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1-t)Y\big).$$

Di conseguenza,

$$F(Y) - F(X) = \int_0^1 (X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1-t)Y\big)\,dt.$$

Quindi, possiamo stimare

$$\begin{aligned} |F(Y) - F(X)| &= \left|\int_0^1 (X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1-t)Y\big)\,dt\right| \\ &\le \int_0^1 \big|(X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1-t)Y\big)\big|\,dt \\ &\le \int_0^1 |X - Y| \cdot |\nabla F|\big(tX + (1-t)Y\big)\,dt \\ &\le M|X - Y|, \end{aligned}$$

dove $M$è il massimo di $|\nabla F|$ in $\overline{B}_r(X_0)$. □

---

## Unicità delle soluzioni

**Teorema 3.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$ in $\Omega$ e $X_0 \in \Omega$ un punto (dato iniziale) fissato. Supponiamo che*

$$X : [0,T) \to \mathbb{R}^d \qquad e \qquad Y : [0,T) \to \mathbb{R}^d$$

*siano due soluzioni di*

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0,T) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0,T) \\ Y(0) = X_0 \end{cases}$$

*Allora*

$$X(t) = Y(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (0,T).$$

**Dimostrazione:** Sia $S \ge 0$ il punto più grande in $[0,T)$ tale che

$$X(t) = Y(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [0,S).$$

Dimostreremo che $S = T$. Supponiamo per assurdo che $S < T$. Per la continuità di $X$ e di $Y$, esiste $\delta > 0$ (abbastanza piccolo, tale che $S < S + \delta < T$) tale che

$$X(t) \in B_r(X_0) \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta].$$

$$Y(t) \in B_r(X_0) \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta].$$

Consideriamo la funzione

$$f(t) = |X(t) - Y(t)|^2 \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta).$$

Calcoliamo la derivata

$$\begin{aligned} f'(t) &= \partial_t\big[|X(t) - Y(t)|^2\big] \\ &= 2\big(X'(t) - Y'(t)\big) \cdot \big(X(t) - Y(t)\big) \\ &= 2\big(F(X(t)) - F(Y(t))\big) \cdot \big(X(t) - Y(t)\big). \end{aligned}$$

Ora, siccome

$$X(t) \in B_r(X_0),\, Y(t) \in B_r(X_0) \text{ e } F \text{ è } L\text{-Lipschitz in } B_r(X_0),$$

abbiamo che

$$\big|F(X(t)) - F(Y(t))\big| \le L|X(t) - Y(t)|.$$

Di conseguenza,

$$f'(t) \le 2Lf(t).$$

e quindi

$$\partial_t\Big(f(t)e^{-2Lt}\Big) \le 0.$$

In particolare, $f(t)e^{-Lt} \le f(0) = 0$ e dunque

$$f(t) = 0 \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta].$$

In conclusione, otteniamo che $S = T$. □

**Corollario 4.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$ in $\Omega$ e $X_0 \in \Omega$ un punto (dato iniziale) tale che $F(X_0) = 0$. Se*

$$X : [0, T) \to \mathbb{R}^d$$

*è una soluzione di*

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0, T) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

*allora*

$$X(t) = X_0 \quad \textit{per ogni} \quad t \ge 0.$$

*Diciamo che $X_0$ è un* **punto stazionario** *o anche* **punto di equilibrio** *per il problema $X' = F(X)$.*

**Corollario 5.** *Siano $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$ in $\Omega$ e $X_0 \in \Omega$. Sia $X : [0, T) \to \mathbb{R}^d$ una soluzione di*

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0, T) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

*Se $X_0$ non è stazionario, allora il sostegno della curva $X$ non contiene punti stazionari, ovvero*

$$F(X(t)) \ne 0 \quad \textit{per ogni} \quad t \in [0, T).$$

---

## Continuità rispetto al dato iniziale

**Teorema 6.** *Siano $\Omega$ un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$ in $\Omega$ e $X_0 \in \Omega$ un punto (dato iniziale) fissato. Supponiamo che*

$$Y : [0, T) \to \mathbb{R}^d \qquad e \qquad Z : [0, T) \to \mathbb{R}^d$$

*siano due soluzioni di*

$$\begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0, T) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} Z'(t) = F(Z(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0, T) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

*Supponiamo che $B_r(X_0) \subset \mathbb{R}^d$ sia una palla tale che:*

(a) $|F(X) - F(Y)| \le L|X - Y|$ *per ogni* $X, Y \in \overline{B}_r(X_0)$,

(b) $Y(t) \in B_r(X_0)$ *e* $Z(t) \in B_r(X_0)$ *per ogni* $t \in [0, T)$.

*Allora*
$$|Y(t)-Z(t)|\le e^{Lt}|Y_0-Z_0| \quad \textit{per ogni} \quad t\in[0,T).$$

**Dimostrazione:** Consideriamo la funzione
$$f(t)=|Y(t)-Z(t)|^2 \quad \text{per ogni} \quad t\in[0,T).$$
Calcoliamo la derivata
$$\begin{aligned} f'(t) &= \partial_t\big[|Y(t)-Z(t)|^2\big]\\ &= 2\big(Y'(t)-Z'(t)\big)\cdot\big(Y(t)-Z(t)\big)\\ &= 2\big(F(Y(t))-F(Z(t))\big)\cdot\big(Y(t)-Z(t)\big). \end{aligned}$$
Ora, per ipotesi, abbiamo che
$$\big|F\big(Y(t)\big)-F\big(Z(t)\big)\big|\le L|Y(t)-Z(t)|.$$
Di conseguenza,
$$f'(t)\le 2Lf(t).$$
e quindi
$$\partial_t\Big(f(t)e^{-2Lt}\Big)\le 0.$$
In conclusione,
$$e^{-2Lt}|Y(t)-Z(t)|^2\le|Y_0-Z_0|^2 \quad \text{per ogni} \quad t\in[0,T).$$

---

## Teorema di esistenza

**Teorema 7** (Teorema di Cauchy-Lipschitz)**.** *Sia $\Omega\in\mathbb{R}^d$ un aperto e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$. Allora, per ogni $X_0\in\Omega$ eistono:*

- *$T>0$ ;*
- *una funzione $X:[0,T)\to\Omega$ continua su $[0,T)$ e di classe $C^1$ su $(0,T)$ ;*

*tali che:*
$$X(0)=X_0\ ; \quad X'(t)=F(X(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t\in(0,T)\,.$$

---

## Intervallo massimale di esistenza

Sia $\Omega\in\mathbb{R}^d$ un aperto e $F:\Omega\to\mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$ e $X_0\in\Omega$ un dato iniziale fissato. Supponiamo che
$$X:[0,T)\to\mathbb{R}^d \qquad \text{e} \qquad Y:[0,S)\to\mathbb{R}^d$$
siano due soluzioni di
$$\begin{cases} X'(t)=F(X(t)) & \text{per ogni} \quad t\in(0,T)\\ X(0)=X_0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} Y'(t)=F(Y(t)) & \text{per ogni} \quad t\in(0,S)\\ Y(0)=X_0 \end{cases}.$$
Allora, per il teorema dell'unicità della soluzione, abbiamo che
$$X(t)=Y(t) \quad \text{per ogni} \quad 0\le t<\min\{S,T\}.$$
In particolare, esiste un **intervallo massimale di esistenza**, ovvero esistono
$$T_{max}>0 \quad \text{e una soluzione} \quad X:\big[0,T_{max}\big)\to\Omega$$
tali che se
$$T>0 \quad \text{e} \quad Y:[0,T)\to\Omega \quad \text{è una soluzione,}$$
allora
$$T\le T_{max} \quad \text{e} \quad X\equiv Y \quad \text{su} \quad [0,T).$$

Dati la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ e il dato inziale $X_0 \in \Omega$, ci sono due possibilità :

- la soluzione di
$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$
**esiste per tutti i tempi:** $T_{max} = +\infty$ ;
- la soluzione **non esiste per tutti i tempi:** $T_{max} < +\infty$.

**Per esempio:**

- la soluzione del problema
$$x'(t) = x(t), \quad x(0) = 1$$
esiste per tutti i tempi ed è data dalla funzione $x(t) = e^t$ ;
- una soluzione del problema
$$x'(t) = \sqrt{x(t)}, \qquad x(0) = \frac{1}{2},$$
è la funzione
$$x(t) = \frac{1}{2-t}.$$
In particolare, in questo caso, $T_{max} = 2$.

**Teorema 8.** *Siano $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$ e $X_0 \in \Omega$ un dato iniziale. Se l'intervallo massimale di esistenza della soluzione di*
$$X'(t) = F(X(t)), \qquad X(0) = X_0$$
*è finito: $T_{max} < +\infty$, allora succede una delle due cose seguenti:*

(i) *esiste una successione (crescente) $t_n \to T$ tale che*
$$\lim_{n\to+\infty} |X(t_n)| = +\infty \ ;$$

(ii) *esiste una successione (crescente) $t_n \to T$ tale che*
$$\text{la successione} \quad X(t_n) \quad \text{converge ad un certo} \quad X_\infty \in \partial\Omega.$$

## Esercizi

**Esercizio 9.** *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione limitata e di classe $C^1$. Dimostrare che, per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*
$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$
*è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.*

**Esercizio 10.** *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe $C^1$ tale che*
$$|F(X)| \le 7|X| \quad \text{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$
*Dimostrare che, per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*
$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$
*è $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.*

**Esercizio 11.** *Sia* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *una funzione di classe* $C^1$ *tale che*

$$X \cdot F(X) \leq 0 \quad \textit{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

*Dimostrare che, per ogni* $X_0 \in \mathbb{R}^d$*, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$

*è* $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$*.*

**Esercizio 12.** *Mostrare che per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$*, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*è* $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$*.*

**Esercizio 13.** *Mostrare che per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$*, l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t)\sin(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*è* $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$*.*

**Esercizio 14.** *Sia* $x_0 \in [0, 1]$*.*

*(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*è* $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$*.*

*(b) Mostrare che esiste il limite*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t)$$

*e calcolarlo in funzione di* $x_0 \in [0, 1]$*.*

**Esercizio 15.** *Sia* $x_0 \in (-\infty, 1]$*.*

*(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = x^3(t) - x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*è* $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$*.*

*(b) Mostrare che esiste il limite*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t)$$

*e calcolarlo in funzione di* $x_0 \in [0, 1]$*.*

**Esercizio 16.** *Sia* $x_0 \in [-1, 1]$*.*

*(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t))\big(x^3(t) - x(t)\big) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*è* $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

*(b) Mostrare che esiste il limite*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)$$

*e calcolarlo in funzione di* $x_0 \in [0, 1]$.

**Esercizio 17.**

*(a) Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza per il problema*

$$\begin{cases} x'(t) = x^4(t) - (\sin(x(t)) + 1)x^2(t) + \sin(x(t)) \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

*è* $\mathcal{I}_{max} = [0, +\infty)$.

*(b) Provarte che* $|x(t)| < 1$ *per ogni* $t > 0$.

*(c) Calcolare il limite* $\lim\limits_{x\to+\infty} x(t)$.

**Esercizio 18.** *Sia* $\mathcal{E} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* $C^2$ *con la proprietà seguente:*

*per ogni* $c \in \mathbb{R}$ *l'insieme* $\{\mathcal{E} \le c\}$ *è compatto.*

(a) *Dimostrare che per ogni* $X_0 \in \mathbb{R}^d$ *l'intervallo massimale di esistenza di*

$$X' = -\nabla\mathcal{E}(X)\,, \qquad X(0) = X_0$$

*è* $[0, +\infty)$.

(b) *Mostrare che la funzione* $t \mapsto \mathcal{E}(X(t))$ *è monotona decrescente.*

**Esercizio 19.** *Sia* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* $C^1$*. Mostrare che per ogni* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = -y\, g(x, y) \\ y' = x\, g(x, y) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

*è l'intervallo* $[0, +\infty)$.

**Esercizio 20.** *Sia* $\big(x(t), y(t)\big)$ *la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = y - xy \\ y' = x + x^2 \\ x(0) = \frac{1}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è* $[0, +\infty)$.
2. *Mostrare che* $x(t) \leq 1$ *per ogni* $t$
3. *Mostrare che* $y(t) \geq 0$ *per ogni* $t$.
4. *Mostrare che* $x(t)$ *e* $y(t)$ *sono funzioni monotone crescenti.*
5. *Mostrare che*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1 \qquad e \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty.$$

**Esercizio 21.** *Si consideri la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *del sistema*

$$\begin{cases} x' = 3y\, e^x \sin(xy) \\ y' = 5x\, e^y \sin(xy) \\ x(0) = 2 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. *Mostrare che* $x(t) > 0$ *e* $y(t) > 0$ *per ogni* $t$.
2. *Mostrare che* $x(t)y(t) \leq \pi$ *per ogni* $t$.
3. *Mostrare che* $2 \leq x(t) \leq 2\pi$ *e* $\dfrac{1}{2} \leq y(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$ *per ogni* $t$.
4. *Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è* $[0, +\infty)$.
5. *Mostrare che le funzioni*

$$t \mapsto x(t), \qquad t \mapsto y(t), \qquad t \mapsto x(t)y(t)$$

*sono monotone crescenti e*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)y(t) = \pi.$$

**Esercizio 22.** *Si consideri la soluzione* $\big(x(t), y(t)\big)$ *del sistema*

$$\begin{cases} x' = e^{xy} \; \cos x \\ y' = e^{x+y} \; \cos y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Mostrare che per ogni* $t$ *(nell'intervallo massimale di esistenza)*

$$-\frac{\pi}{2} \leq x(t) \leq \frac{\pi}{2} \qquad e \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x(t) \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

2. *Mostrare che le funzioni* $x$ *e* $y$ *sono crescenti e che per ogni* $t$

$$1 \leq x(t) \leq \frac{\pi}{2} \qquad e \qquad 1 \leq x(t) \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

3. *Mostrare che* $1 \leq x(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$ *e* $1 \leq y(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$ *per ogni* $t$.
4. *Mostrare che l'intervallo massimale di esistenza è* $[0, +\infty)$.
5. *Mostrare che la funzioni* $t \mapsto x(t)$ *e* $t \mapsto (t)$ *sono crescenti e*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \frac{\pi}{2} \qquad e \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{\pi}{2}.$$